NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 91, marzo de 2016, páginas 33-56

Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad

Emmanuel Caballero Juárez, José Antonio Juárez López
(Universidad Autónoma de Puebla. México)

Fecha de recepción: 11 de mayo de 2015
Fecha de aceptación: 20 de septiembre de 2015

Resumen En este trabajo se muestra el análisis de los errores algebraicos detectados en un estudio que abordó la adición de fracciones algebraicas en estudiantes de nuevo ingreso en una universidad pública de Puebla, México. La investigación se realizó mediante la aplicación de un cuestionario de catorce ejercicios, los cuales tuvieron como objetivo detectar y analizar tales errores. Además, a partir de las respuestas dadas se realizó una clasificación de los mismos. Posteriormente se realizaron seis entrevistas para proporcionar un acercamiento cualitativo tanto a las respuestas como a los procedimientos dados por los estudiantes.

Palabras clave Fracciones algebraicas, manipulación algebraica, expresiones algebraicas, errores.

Title **Analysis and classification of errors in reducing algebraic fractions in first-year college students**

Abstract This work shows the analysis of the algebraic errors detected in a study that addressed the adding algebraic fractions in new students at a public university in Puebla, Mexico. The research was conducted through the application of a questionnaire of fourteen exercises, which had as aim to identify and analyze such errors. In addition, from the responses we made a classification of the same. Subsequently six interviews were carried out to provide a qualitative approach to the answers as to the procedures given by the students.

Keywords Algebraic fractions, algebraic manipulation, expressions, errors.

1. Introducción

Algunos de los estudios que se han realizado en torno a la variable como número general, se han centrado en la manipulación algebraica (Matz, 1980; Booth, 1988; Linchevski y Herscovics, 1994; Wong, 1997). Además, se conocen resultados de estudios en simplificación de fracciones (Vega, Molina y Castro, 2012). Por otro lado, se han realizado investigaciones para clasificar los errores que se cometen en el álgebra (Keller, Shreve y Remmers, 1940; Rico, 1994; García, 2010; Caballero, 2015).

Asimismo, existen investigaciones acerca del desempeño de estudiantes cuando trabajan con fracciones algebraicas equivalentes, sin embargo, las relacionadas con la adición de fracciones han sido escasas, por ello consideramos conveniente realizar este tipo de estudio con alumnos recién egresados del bachillerato y que están en un área afín a las Matemáticas.

El propósito de esta investigación fue observar si los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad eran capaces de realizar la adición de fracciones algebraicas. Adicionalmente, el estudio está centrado en conocer los errores que se cometen cuando se intenta resolver este tipo de ejercicios. Por ello, se llevó a cabo una clasificación de estos errores.

Por otro lado, se consideró también averiguar cuáles son las estrategias utilizadas en la resolución de estos ejercicios. Para tal fin, fue utilizado un cuestionario que consta de 14 ejercicios sobre adición de fracciones algebraicas.

2. Marco de referencia

No se debe ignorar que los errores manifiestan un proceso complejo en el que podrían interactuar muchas variables como: el profesor, el alumno, los tipos de enseñanza, los tipos de aprendizaje, entre otras. Cuando los estudiantes inician su estudio con expresiones algebraicas muchas veces se ven obligados a aprender a considerarlas como objetos muy abruptamente, con las cuales estarían realizando operaciones de un nivel distinto de dificultad.

2.1. Dificultades en la transición de la aritmética hacia el álgebra

Los estudiantes que inician el estudio del Álgebra traen el conocimiento y sentido que utilizan en Aritmética. Sin embargo, el Álgebra no es simplemente una generalización de la Aritmética. Es un área en la que los estudiantes no siempre llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque desconocen su relación.

Kieran y Filloy (1989) sostienen que: "El Álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones". (p. 229). A su vez Kieran y Chalouh (1993) mencionan que en la mayoría de los cursos de Álgebra rara vez se concede un enlace entre el uso de los números en Aritmética y el uso de letras en el Álgebra, con lo cual los alumnos no tienen la oportunidad de crear conexiones entre éstos.

Por otra parte, Phillip y Schaphelle (1999) opinan que, para que los estudiantes puedan ver el Álgebra como Aritmética generalizada, deben crear una relación entre el Álgebra y la Aritmética, la cual debe estar establecida en sus mentes.

Cuando los estudiantes se enfrentan a diversas situaciones algebraicas, ponen en juego su conocimiento aritmético previo, el cual puede impedirles asimilar la transición que se presenta al pasar de la Aritmética al Álgebra ocasionándoles dificultades. De acuerdo con Matz (1980), dichas dificultades se deben a que los estudiantes no asimilan los cambios conceptuales en la transición citada, por lo que, en ocasiones, se ven forzados a resolver una nueva situación con lo que saben, cometiendo así errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación.

En particular, en la escuela secundaria es donde los estudiantes se enfrentan por primera vez con las letras (como variables), y es también donde se espera que éstos aprendan a usarlas eficientemente. El exceso de manipulación de símbolos podría generar que los estudiantes no las usen adecuadamente y le den diferentes tipos de interpretaciones.

2.2. Diferentes interpretaciones de las variables

El concepto de variable es considerado básico en la enseñanza de las matemáticas. Muchos profesores consideran al concepto de variable como algo "ya dado" y que por tanto no requiere un tratamiento específico para ser asimilado por los estudiantes. Muchas de las dificultades que los estudiantes tienen con las variables se relacionan con la incapacidad de reconocer su papel correcto. El no reconocer las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable se torna frecuentemente en un obstáculo que bloquea el aprendizaje del álgebra, y en general de la matemática.

En la investigación que realizó Küchemann (1980), identificó seis interpretaciones diferentes para las literales, las cuales son: letra evaluada, letra no utilizada, letra como objeto, letra como incógnita específica, letra como número generalizado, letra como variable.

Por su parte, Ursini (1994) realizó un estudio cuyo propósito era saber cuáles eran los diferentes usos de la variable en Álgebra elemental. En dicho trabajo identificó los siguientes usos: variable como número general, variable en una relación funcional y variable como incógnita específica. Estos resultados muestran que la interpretación dada por los alumnos no siempre es la apropiada y que frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas. Sin embargo, las dificultades que se presentan en el Álgebra no solo se deben a las interpretaciones de la variable o a que no se les enfatiza la transición entre la Aritmética y el Álgebra. En este sentido, Ursini (1994) menciona también que, para que un estudiante tenga un buen manejo de la variable como número general debe poder manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

2.3. Errores en la manipulación algebraica

Los alumnos de nivel superior efectivamente tienen problemas de maduración, tales como aplicar parcialmente una fórmula, omitir signos, desarrollar expresiones algebraicas. Estos problemas no son de fácil solución, sin embargo, el profesor puede detectar y resolver si existe la cooperación del alumno. No obstante, otras veces se han observado problemas de maduración de tal magnitud que pareciera que se originaron desde varios niveles anteriores.

Booth (1988) investigó el tipo de expresiones algebraicas que los alumnos consideraban equivalentes y observó que interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto. En algunas situaciones los estudiantes son más proclives a cometer errores en expresiones cuando éstas involucran números. Wong (1997) sugiere que estos errores pueden ser cometidos en este tipo de expresiones algebraicas dependiendo del grado de complejidad de las expresiones o del conocimiento algebraico de cada uno de los estudiantes.

Es muy común que los errores en álgebra aparezcan durante el trabajo con variables y es por eso que Matz (1980) realizó un catálogo con los errores que los estudiantes cometen con mayor regularidad, a continuación se muestran algunos de ellos:

a) Simplificando $3+23(S\text{-}4)$ como $26(S\text{-}4)$

b) Simplificando $3xy + 4yz$ como $7xyz$

c) Calculando $(A+B)^2$ como $A^2 + B^2$

d) Simplificando $\frac{Ax+By}{x+y}$ como A+B

e) Simplificando $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ como 2xy

Además de hacer el catálogo de errores esta autora planteó un modelo de competencia algebraica para explicar por qué se dan estos errores, en el que afirma que son provocados por alguna de las dos técnicas de extrapolación: linealidad y generalización.

Por otro lado, en la investigación que reporta Muñoz (2002) sobre la valoración de los errores, afirma que:

> "El tipo de errores que un alumno puede cometer es casi tan grande como el número de alumnos, puede cometer errores que ni siquiera nos imaginamos, pero si se entiende lo que hizo mal y cuáles son los puntos clave que el alumno no domina entonces puede ayudársele con mayor eficacia" (Muñoz, 2002. p.1253).

En su estudio, el mismo autor encontró que hay tres tipos de errores, los cuales pueden ser vistos como: errores no graves, errores por respuestas incompletas y errores graves y muy graves.

Rico (1994) señala varias propuestas para la categorización de los errores. Cada una está inspirada en un modelo particular del procesamiento de información. Hay también algunas clasificaciones que son resultados de investigaciones empíricas sobre los errores.

2.4. Clasificación de errores

La identificación de las diversas clases de errores nos permite dirigir la atención hacia los diferentes aspectos que los generan, además facilita la elaboración de un diagnóstico más efectivo para poder ayudar a los estudiantes en sus dificultades y en la falta de sentido en los objetos matemáticos.

Por lo cual, varios autores han hecho categorizaciones de errores, para poder conocer qué es lo que están haciendo incorrectamente y saber cómo se les puede ayudar a corregirlo. A continuación se presentan algunas categorizaciones y/o clasificaciones realizadas por diferentes autores y teniendo en cuenta distintos enfoques.

En la investigación que realizaron Ruano, Socas y Palarea (2008) con estudiantes de secundaria, consideran tres ejes que permiten analizar el origen del error. Con esto pueden situar los errores que cometen los estudiantes en relación con tres orígenes distintos.

- Obstáculos
- Ausencia de sentido
- Actitudes afectivas y emocionales

García (2010), por lado, realizó una clasificación de los diferentes errores detectados en su investigación, los cuales son:

- Eliminación incorrecta de denominadores
- Errores al realizar operaciones aritmético-algebraicas
- Procedimiento inconcluso
- Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas
- Aplicación parcial de regla de factorización por factor común
- Asociación incorrecta de productos notables
- Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra
- Error en la determinación de la potencia de otra potencia

- Resolución aditiva de la potencia de un binomio
- Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio
- Error al realizar productos de polinomios
- Error de cálculo simple

Por otra parte, Rico (1994) en su investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria, determinó seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

- Datos mal usados
- Interpretación incorrecta del lenguaje
- Inferencias no válidas lógicamente
- Teoremas o definiciones deformados
- Falta de verificación en la solución
- Errores técnicos

Keller, Shreve y Remmers (1940) realizaron una clasificación de los errores que cometen los estudiantes de nuevo ingreso en la Universidad de Purdue, al resolver una prueba diagnóstico, la cual involucraba realizar operaciones básicas con expresiones algebraicas. Los errores que ellos encontraron son:

- En los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo positivo o negativo
- En la adición de términos
- Al combinar términos semejantes para simplificar una expresión
- Al distribuir la multiplicación
- Al omitir un término o un símbolo
- Al remover un paréntesis para simplificar
- Al multiplicar polinomios donde la adición algebraica está indicada
- Al multiplicar términos donde la adición está indicada
- Al sumar donde la multiplicación está señalada
- Al copiar
- En el entendimiento, al leer o confundiendo términos u operaciones
- Al multiplicar polinomios "término a término"
- Al distinguir entre símbolos diferentes
- Por combinar términos diferentes
- Al hacer cálculos numéricos en la multiplicación
- Al multiplicar por una regla incorrecta o formula equivocada
- Al escribir los signos de los factores
- Error numérico en la factorización o error en el exponente en los factores
- Por factorizar "término a término"
- Por factorizar mediante una fórmula incorrecta
- Al no factorizar completamente
- Por cambiar de signos arbitrariamente
- Al no cancelar factores comunes
- Por realizar una multiplicación cruzada injustificada
- Al multiplicar arbitrariamente todas las partes de la fracción
- Al omitir el denominador o un factor del denominador, de una fracción
- Al sumar numeradores y denominadores indiscriminadamente al combinar fracciones

- Por cancelar factores diferentes del polinomio del numerador y denominador
- Miscelánea de errores o errores en los que el trabajo del estudiante es incomprensible

Aunque la investigación hecha por Keller, Shreve y Remmers (1940) fue realizada hace mucho tiempo, el interés por estudiar los errores que cometen los estudiantes en el álgebra sigue vigente.

3. Justificación

Con lo mencionado anteriormente, se tiene la certeza de que los estudiantes tienen muchas dificultades al emplear el Álgebra y tienen muchos errores, los cuales pueden ser originados por diferentes razones. Sin embargo, nuestro interés se centra en el hecho de que a los estudiantes les resulta difícil la manipulación algebraica.

En la investigación que reportan Vega, Molina y Castro (2012), los estudiantes presentan diversos errores al resolver ejercicios de reducción de fracciones algebraicas. Sin embargo, existen muy pocas investigaciones que se centran en el estudio de suma y resta de fracciones algebraicas, por lo que nos interesó saber qué tipo de errores exhiben los estudiantes al trabajar con esta clase de ejercicios. De lo anterior surgen las preguntas de investigación:

¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes cuando realizan la suma o resta de fracciones algebraicas?
¿Cuáles son las estrategias que los estudiantes usaron para resolver dichos ejercicios? Lo anterior nos lleva a nuestros objetivos en la investigación.

3.1. Objetivos de la investigación

Lo que va a guiar esta investigación será nuestro objetivo general:

Identificar los errores que cometen los estudiantes cuando se enfrentan a la adición de fracciones algebraicas.

Sin embargo, esto no sólo es lo que se pretende en esta investigación. También, se buscará identificar las estrategias que se emplearon para resolver los ejercicios, además de hacer una clasificación de los errores que los estudiantes cometieron al resolver el cuestionario, por lo que otro objetivo específico fue realizar dicha clasificación.

4. Método

4.1. Descripción de la población estudiada

Para realizar esta investigación se tomó en cuenta a la mayoría de los estudiantes de nuevo ingreso en una facultad de una universidad pública en Puebla, México. Sin embargo, solo se pudieron recabar 273 pruebas, puesto que cuando ésta se realizó, no todos los estudiantes se encontraban en clase. Además, cabe mencionar que los estudiantes son de diferentes carreras que se encuentran en esta facultad, las cuales son; Matemáticas, Matemáticas Aplicadas, Física, Física Aplicada y Actuaría. Se aplicó un cuestionario que consta de catorce ejercicios. Posteriormente, se realizó un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas dadas. Por último, se realizaron entrevistas clínicas a seis estudiantes y se realizó el análisis e interpretación de las mismas.

4.2. Marco curricular

En esta parte se describe los planes de estudios de bachillerato de algunos colegios de los cuales provienen los estudiantes de nuestro estudio. Se realiza una breve descripción de las materias del área de Matemáticas que llevan algunos de los bachilleratos o preparatorias, ya que los temas vistos deberían ser suficientes, desde nuestro punto de vista, para resolver el cuestionario. Se revisaron los planes de estudio de tres sistemas de Educación Media Superior. También se analizaron las materias en donde se les enseñan los temas que les servirían de base para resolver el cuestionario.

En el primer sistema de bachilleratos la materia es Álgebra. Algunos de los temas que se estudian en esta asignatura son: leyes de los exponentes, operaciones con polinomios, productos notables, factorización, entre otros. En el segundo sistema la materia es Matemáticas I. Algunos de los temas que se estudian en esta materia son: sumas, restas y multiplicaciones con polinomios, diferentes técnicas de factorización, productos notables, entre otros. En el tercer sistema de bachillerato, la materia es Matemáticas I. Esta materia se centra en el Álgebra elemental, además de que se hace un estudio del cálculo simbólico.

Con lo anterior, se trató de abarcar algunos de los planes de estudio del área de Matemáticas de las diferentes escuelas, y se puede decir que aunque llevan diferentes materias, éstas contienen temas similares, los cuales están en las asignaturas Álgebra I y Matemáticas I. Algunos de estos temas son reducción de términos semejantes, productos notables, factorización, binomio al cuadrado, entre otros que se necesitan para poder resolver el cuestionario. Con los temas antes mencionados los estudiantes de nuevo ingreso, creímos, deberían ser capaces de resolver ejercicios de álgebra como los que se les presentaron.

4.3. Instrumento

El cuestionario que se propuso para esta investigación fue diseñado para que los estudiantes lo resolvieran con los conocimientos previamente adquiridos al ingreso a la universidad. Como se mencionó en la introducción, el cuestionario constó de 14 ejercicios los cuales fueron extraídos de diferentes libros de Álgebra. Esta selección se realizó tomando como criterio, el hecho de que un gran número de libros de texto contienen ejercicios de este tipo y son muy comunes en México. A continuación se describen los textos de donde fueron tomados los reactivos. Lo que se pretendió averiguar con cada ejercicio era observar el tipo de estrategias y errores en la manipulación de expresiones algebraicas cuando se trata de la adición de fracciones.

- Elementos de Álgebra. (1917). Wentworth, J. y Smith, D. E; Ginn y compañía.
- Curso de Álgebra. (1959). Anfonssi, A; Editorial Progreso.
- Primeras nociones de Álgebra. (s.f.) Boyer, J.B; Editorial Enseñanza.
- Álgebra. (1998). Rees, P. y Sparks, F; Reverté ediciones.

En la Tabla 1 se especifica de qué libros fueron elegidos los ejercicios que se tomaron en cuenta para el cuestionario, el cual nos sirvió para realizar la investigación:

Número de ejercicio	Nombre del libro
2,4,5,6	Elementos de Álgebra
11,12,13	Curso de Álgebra
9,10	Primeras nociones de Álgebra
7, 8,14	Álgebra

Tabla 1. Ejercicios seleccionados por libro

En la tabla anterior se describe cuántos y cuáles ejercicios son los que se tomaron de cada libro para el cuestionario; sin embargo, en la tabla no aparecen los ejercicios 1 y 3, los cuales son un derivado de los ejercicios 2 y 4 respectivamente. Estos ejercicios son muy parecidos, solo difieren en el signo de alguno de los denominadores, por lo que se buscaba saber si los estudiantes se darían cuenta de esta diferencia. En el Anexo se puede apreciar cada uno de los ejercicios utilizados en el estudio.

Para la aplicación del cuestionario se les mencionó que contarían con 75 minutos para resolverlo y se les dio la indicación de que cada respuesta fuese dada en su mínima expresión.

5. Análisis de los datos

En esta sección describiremos los errores que los estudiantes cometieron al resolver el cuestionario que se les aplicó. Además, se detallan las características de los principales errores cometidos.

Inicialmente se examinaron cada uno de los cuestionarios que se están tomando en cuenta, con el fin de distinguir los diferentes errores que se produjeron al contestar. Después, se fueron clasificando de acuerdo con las características similares que podrían presentar en cada uno de los ejercicios o entre las demás pruebas y, por último, se fueron clasificando tomando en cuenta las categorías previamente revisadas.

5.1. Clasificación de los errores detectados

Procedimiento inconcluso. En este tipo de errores los estudiantes realizan todas las operaciones correctamente, sin embargo, no llegan a simplificar completamente el ejercicio y no llegan a la respuesta. No obstante que se les pidió que redujeran a la mínima expresión sus respuestas. Un ejemplo de lo anterior se puede ver en la Figura 1.

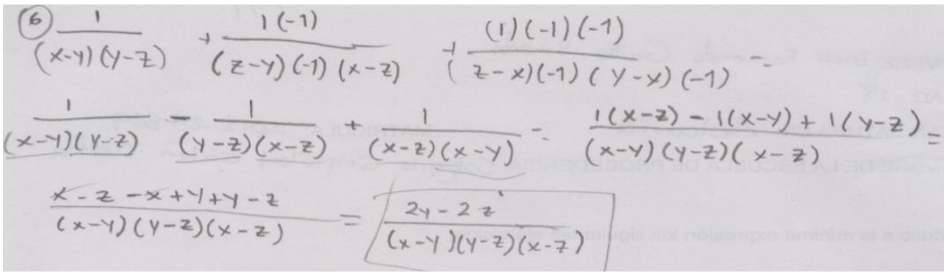

Figura 1. Procedimiento inconcluso

Muñoz (2002) señala que este tipo de fallos son errores por respuestas incompletas. Por otra parte, García (2010) llama a este tipo de errores como de procedimiento inconcluso. Este error lo cometieron aproximadamente el 63% de los estudiantes.

Errores por confundir términos. Estos errores son generados porque los estudiantes escriben los símbolos o literales muy parecidos a otros. Un ejemplo de lo mencionado se puede ver en la Figura 2.

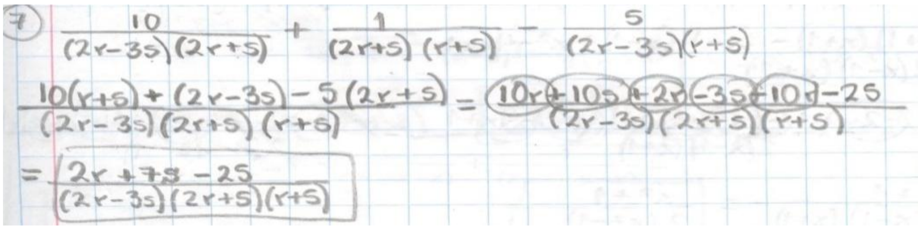

Figura 2. Error por confundir términos

Muñoz (2002) sostiene que este tipo de errores son del tipo no graves. Por otra parte, Keller et al (1940) señalan que el tipo de errores que reportan son: en la comprensión, al leer o confundiendo términos. Este error lo cometieron aproximadamente el 3% de los estudiantes.

Errores por multiplicación cruzada. En este tipo de errores se encuentran aquellos en donde los estudiantes resuelven los ejercicios como si fueran de división, como se muestra en la Figura 3. En los dos casos se realizó mediante una multiplicación cruzada. Se observa que al hacer esto olvida escribir el producto de los denominadores. Cabe señalar también que este alumno no reconoce la diferencia entre las expresiones que aparecen en los denominadores, en virtud de que no aplica otra estrategia para resolver este ejercicio.

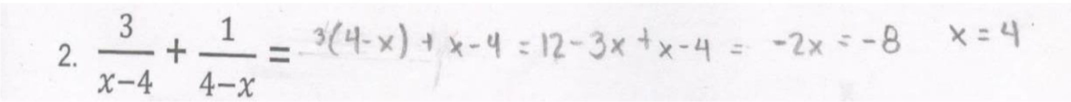

Figura 3. Error por multiplicación cruzada

Para Keller et al (1940) este tipo de errores son clasificados como multiplicación cruzada injustificada. Por otro lado, Matz (1980), menciona que este tipo de errores son errores de ejecución más que errores conceptuales. Booth (1988) menciona que este error puede atribuirse al uso inapropiado de fórmulas o reglas. Nótese también que, en este caso, el estudiante convirtió la expresión resultante en una ecuación lineal, la cual resolvió correctamente olvidando que sólo debía simplificar una expresión abierta. Este error lo cometieron aproximadamente el 10% de los estudiantes.

Errores por omitir un término o un símbolo. En este tipo de errores se encuentran aquellos en donde se les olvida poner algún dato necesario para la solución del ejercicio. Como se observa en la Figura 4.

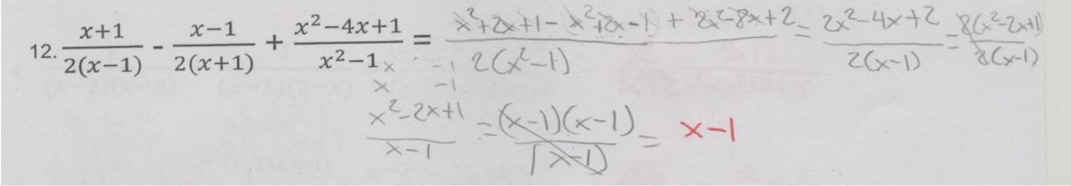

Figura 4. Error por omitir un término o un símbolo

Este error podría ser provocado por una falta de concentración como señala Muñoz (2002), y sería un error de tipo no grave. A su vez Keller et al (1940) afirman que este tipo de errores son causados por la omisión de un término o un símbolo. Este error lo cometieron aproximadamente el 12% de los estudiantes.

Errores por una mala interpretación de la variable. En esta categoría entran los ejercicios en los que los estudiantes intentaron despejar la variable o en donde los estudiantes le asignan un número específico a la variable, como se aprecia en la Figura 5.

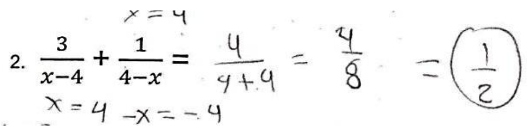

Figura 5. Error por una mala interpretación de la variable

De acuerdo con Küchemann (1980), este tipo de error se da como una forma en la que los estudiantes evitan operar las letras como números desconocidos y dan un valor numérico a la letra. Este error lo cometieron aproximadamente el 4% de los estudiantes.

Asociación incorrecta de productos notables. Estos errores se deben a que los estudiantes intentan asociar las formas y reglas de los productos notables de forma errónea.

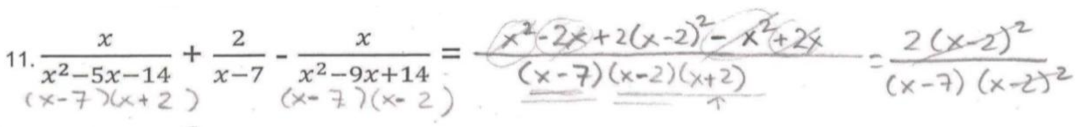

Figura 6. Asociación incorrecta de productos notables

Para García (2010), el error mostrado en la Figura 6, lo llama como error por una asociación incorrecta de productos notables. Por otra parte, en la clasificación de Rico (1994) entraría en su categoría de Teoremas o definiciones deformadas. A su vez Keller et al (1940), sostienen que estos errores son causados por el hecho de multiplicar mediante una regla incorrecta o la utilización de una fórmula equivocada. Este error lo cometieron aproximadamente el 8% de los estudiantes.

Errores al combinar términos diferentes. En este tipo de errores los estudiantes no respetan la forma en la que se reducen términos semejantes, combinan tanto las variables como los exponentes, como se observa en la Figura 7.

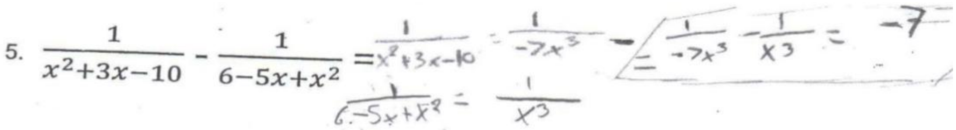

Figura 7. Error al combinar términos diferentes

Para Keller et al (1940) estos errores son causados por la combinación de términos diferentes. En la clasificación de García (2010), estos errores entran en la categoría de uso de la Aritmética básica ignorando las reglas del Álgebra. Este error lo cometieron aproximadamente el 3% de los estudiantes.

Errores por descomponer la fracción. En este tipo de errores lo que hacen los estudiantes es descomponer la fracción en el mismo número de elementos que tiene el denominador, un ejemplo de este tipo de error se puede ver en la Figura 8.

$$5.\quad \frac{1}{x^2+3x-10} - \frac{1}{6-5x+x^2} = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Figura 8. Error por descomponer la fracción

En este caso, Matz (1980) afirma que este tipo de errores se puede dar por una técnica de extrapolación llamada linealidad. En general, estos errores se producen cuando expresiones algebraicas son descompuestas mediante la distribución, en las partes que más se pueda, a través de partes de la expresión. Este error lo cometieron aproximadamente el 6% de los estudiantes.

Errores al distribuir la multiplicación. En esta categoría los estudiantes realizan parcialmente la regla de la distribución, un ejemplo de este tipo de error se puede ver en la Figura 9.

$$10.\quad \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)(x)-(x+y)(y)}{(x^2-y^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-y-x+y^2+x^2+y^2}{x^2-y^2} \Rightarrow \left[\frac{2x^2+2y^2-x-y}{x^2-y^2}\right]$$

Figura 9. Error al distribuir la multiplicación

En la clasificación de Keller et al (1940) este error entraría en los errores por "fallar al distribuir la multiplicación". Para Matz (1980), errores de la forma 2(x+3) = 2x+3, son considerados comúnmente como un tipo de error de ejecución parcial. Este error lo cometieron aproximadamente el 15% de los estudiantes.

Error en el signo, en la adición de términos. En esta categoría aparecen los errores donde los estudiantes dejan un signo menos fuera de una suma de fracciones como se puede ver en la Figura 10.

$$9.\quad \frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} - \frac{(x^2+x)+(x-1)}{x^2-1} =$$

Figura 10. Error en el signo, en la adición de términos

Este error clasificaría como "error en el signo, en la adición de términos" de Keller et al (1940). Este error lo cometieron aproximadamente el 3% de los estudiantes.

Error al no distinguir entre términos diferentes. Dentro de esta categoría se encuentran aquellas respuestas en las que se toman algunos elementos como si fueran iguales, cuando no lo son. Lo anterior se observa en la Figura 11.

$$6.\quad \underset{(x-y)(y-z)}{\frac{1}{(x-y)(y-z)}} + \underset{(y-z)(x-z)}{\frac{1}{(z-y)(x-z)}} + \underset{(x-z)(x-y)}{\frac{1}{(z-x)(y-x)}} = \frac{(x-z)+(x-y)+(y-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \frac{2x-2y-z}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

Figura 11. Error al distinguir entre términos diferentes

Para Keller et al (1940) este tipo de error se catalogaría como “error al no distinguir entre símbolos diferentes”. Este error lo cometieron aproximadamente el 6% de los estudiantes.

Multiplicar polinomios donde la adición algebraica está indicada. En este tipo de errores se presenta al realizar una multiplicación de unos polinomios cuando lo que se debe hacer es una suma de los mismos, un ejemplo de esto se puede ver en la Figura 12.

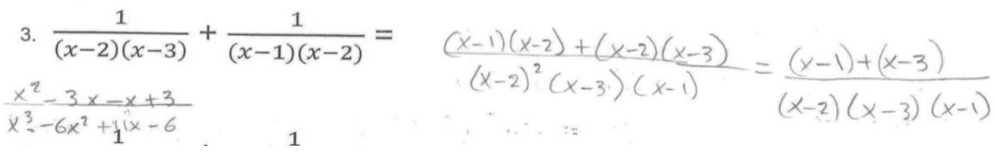

Figura 12. Error por multiplicar polinomios donde la adición algebraica está indicada

Para Keller et al (1940), este error estaría en la categoría de errores por “multiplicar polinomios donde la adición algebraica está indicada”. Este error lo cometieron aproximadamente el 2% de los estudiantes.

Error en el mínimo común múltiplo. En este tipo de errores se encuentran aquellos en donde los estudiantes intentan sacar el m.c.m de una forma errónea o en donde confunden el M.C.D con el m.c.m. Un ejemplo de este tipo de error se puede ver en la siguiente figura.

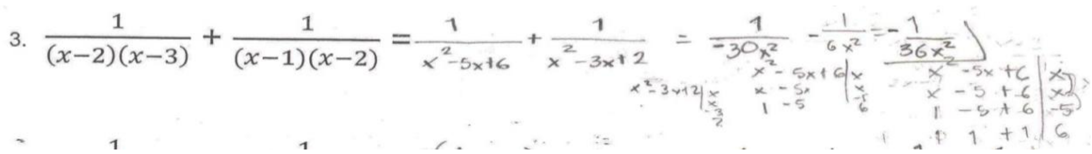

Figura 13. Error en el mínimo común múltiplo

Este error lo cometieron aproximadamente el 1% de los estudiantes.

Multiplicando polinomios “término a término”. Dentro de los errores que se encuentran en esta categoría los estudiantes realizan parcialmente la multiplicación de polinomios. Un ejemplo de ello se puede ver en la Figura 14.

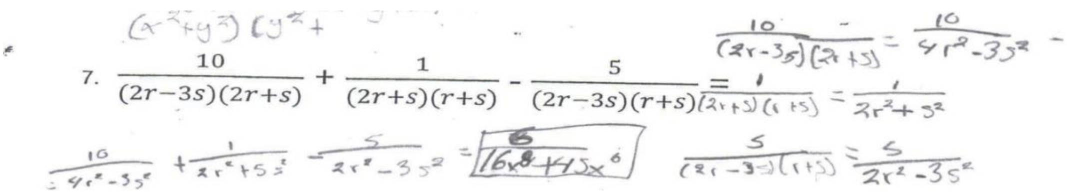

Figura 14. Multiplicando polinomios término a término

Este tipo de errores también se encuentran en la categoría “multiplicando polinomios término a término” de Keller et al (1940). Por otro lado, Matz (1980) asegura que el estudiante ignora las interacciones entre las partes y simplemente multiplica los “términos iguales”, olvidando realizar los productos cruzados. Este error lo cometieron aproximadamente el 7% de los estudiantes.

Error al realizar la adición donde la multiplicación está indicada. En esta categoría se encuentran los errores en los cuales los estudiantes omiten la multiplicación señalada y realizan la adición de los binomios. En la Figura 15, se puede notar lo que uno de los estudiantes realizó con los polinomios que están en cada uno de los denominadores del ejercicio 6, el cual se localiza en el Anexo.

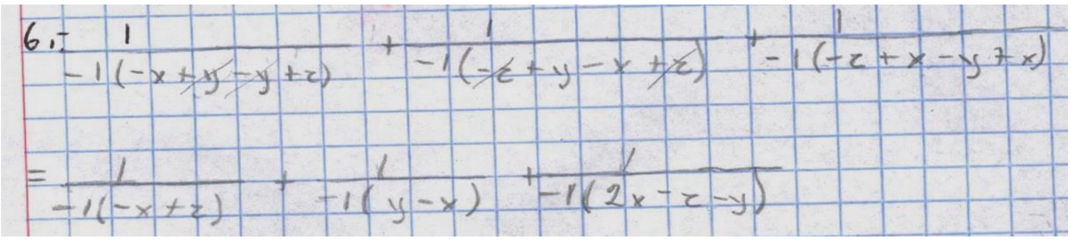

Figura 15. Error al realizar la adición donde la multiplicación está indicada

Este error se encuentra en la clasificación de "sumando donde la multiplicación está señalada" de Keller et al (1940). Este error lo cometieron aproximadamente el 2% de los estudiantes.

Error al factorizar un término. En esta categoría se encuentran todos los errores en los cuales los estudiantes intentan factorizar un término, cuando no todos los elementos contienen el término que se intenta factorizar. Un ejemplo de este error se puede notar en la Figura 16.

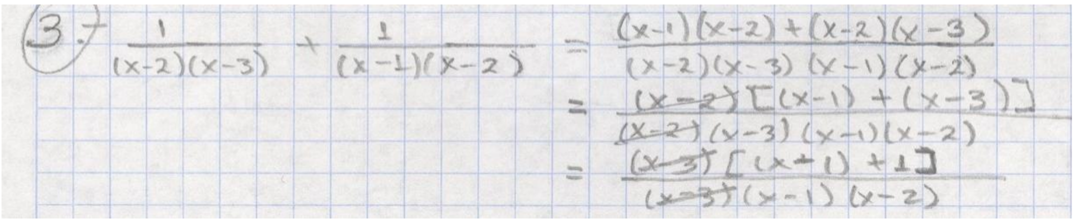

Figura 16. Error al factorizar un término

Este error lo cometieron aproximadamente el 5% de los estudiantes.

Error por hacer suma directa en el numerador y denominador. Dentro de esta categoría están los errores en donde los estudiantes suman directamente tanto numerador como el denominador. Un ejemplo de este error se puede ver en la Figura 17.

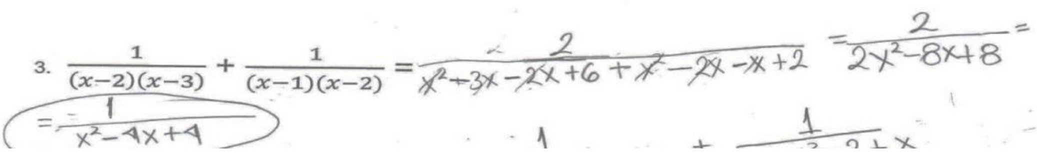

Figura 17. Error por hacer suma directa en el numerador y denominador

Para Keller et al (1940) este tipo de errores está en la clasificación de "sumando numeradores y denominadores indiscriminadamente al combinar fracciones". Este error lo cometieron aproximadamente el 25% de los estudiantes.

Error al factorizar término a término. En este tipo de errores los estudiantes realizan una factorización errónea. En la Figura 18, se puede ver cómo uno de los estudiantes trató de hacer la factorización.

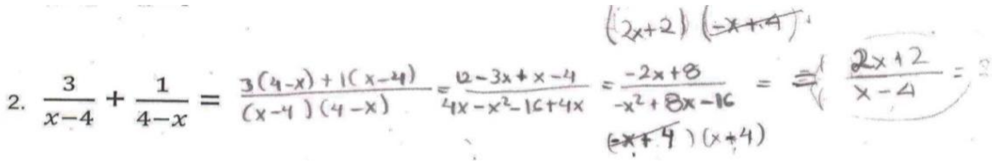

Figura 18. Error al factorizar término a término

Lo que el estudiante intenta realizar es una factorización término a término como lo dicen Keller et al (1940). Este error lo cometieron aproximadamente el 3% de los estudiantes.

Error al cancelar términos. Dentro de esta categoría se encuentran los errores en donde los estudiantes eliminan términos tanto en el numerador como en el denominador, cuando esto no se podía realizar. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 19.

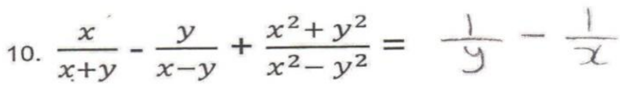

Figura 19. Error al cancelar términos

Para Keller et al (1940) estos errores están en la categoría “cancelación término a término”. Pero para Matz (1980) estos errores se deben al empleo de una técnica de extrapolación por iteración. Este error lo cometieron aproximadamente el 35% de los estudiantes.

Error al multiplicar unos polinomios. En esta categoría se encuentran todos los errores que se pueden derivar al multiplicar los polinomios tales como: error en algún exponente, en algún coeficiente o en algún signo. La razón principal del nombre de esta categoría es porque la mayoría de los estudiantes no realiza todas las operaciones o las hace en otra hoja y no la entrega. Un ejemplo de ello se puede apreciar en la Figura 20.

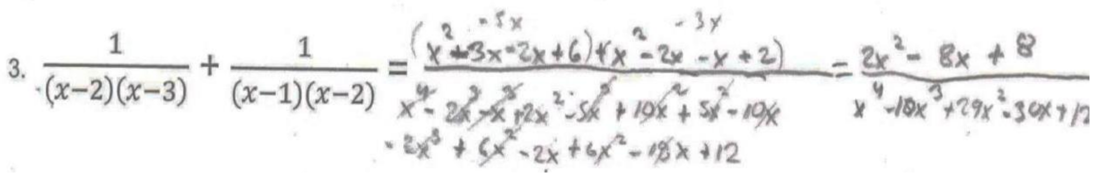

Figura 20. Error al multiplicar unos polinomios.

El error mostrado en la figura anterior entraría en la clasificación “error al multiplicar por una regla incorrecta” de Keller et al (1940). Por otra parte, en la investigación que realizó García (2010), este error se encontraría en “error al realizar productos de polinomios”. Este error lo cometieron aproximadamente el 40% de los estudiantes.

Error al intentar factorizar un trinomio. En este tipo de errores están los intentos fallidos por factorizar un trinomio de segundo grado. En la Figura 21 se encuentra un ejemplo.

$$9.\quad \frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

Figura 21. Error al intentar factorizar un trinomio

Para Keller et al (1940), este error estaría en la categoría de "factorizando por una fórmula incorrecta". Este error lo cometieron aproximadamente el 10% de los estudiantes.

Error en los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo negativo. En este tipo de errores se encuentran aquellos estudiantes que quitaron los paréntesis sin distribuir el signo menos en cada uno de los elementos, también aquellos quienes no quitan los paréntesis sino que solo realizan la suma o resta sin tomar en cuenta el signo menos fuera del paréntesis. En la Figura 22 se muestra un ejemplo de lo mencionado.

$$5.\quad \frac{1}{x^2+3x-10} - \frac{1}{6-5x+x^2} = \frac{6-5x+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+3x-10}{(x-2)(x+5)(x-2)(x-3)} = \frac{(-2x-4)-1}{(x-2)(x+5)(x-2)(x-3)}$$
$$= \frac{2x+4}{(x-2)(x+5)(x-2)(x-3)} = 2(x+2)$$

Figura 22. Error en los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo negativo

Este tipo de errores entrarían en la categoría "Error en los signos, en la eliminación de paréntesis precedidos por un signo negativo" de Keller et al (1940). Este error lo cometieron aproximadamente el 15% de los estudiantes.

Error al emplear su estrategia. Aquí se encuentran aquellos errores en los cuales aplican una estrategia que realizan de forma inadecuada. La Figura 23 muestra un ejemplo de este tipo de error.

$$3.\quad \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-5x+6}{''} = \frac{x^2-5x+6}{(x-3)(x-2)}$$

Figura 23. Error al emplear su estrategia

En la clasificación realizada por García (2010) este tipo de error entraría en la categoría de procedimientos propios e inferencias no válidas, dado que utiliza un procedimiento no válido de una regla parcialmente recordada. Este error lo cometieron aproximadamente el 46% de los estudiantes.

Error al reducir términos semejantes. En esta categoría se encuentran los errores producidos por no tomar en cuenta los signos o por sumar erróneamente los coeficientes. Un ejemplo de lo mencionado se puede ver en la Figura 24.

$$10.\quad \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2-xy-xy-y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} = \frac{1}{1} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

Figura 24. Error al reducir términos semejantes

Para Rico (1994), este tipo de errores se podría encontrar en la categoría de errores técnicos. Por otro lado, estos mismos podrían considerarse como no graves de acuerdo con Muñoz (2002). Además, para García (2010) este error entraría en la categoría de "error de cálculo simple". Esta clase de fallos lo cometieron aproximadamente el 19% de los estudiantes.

Miscelánea de errores. En esta categoría entran los errores en los que es difícil comprender lo qué trataron de hacer los estudiantes, es decir, aun intentando de sumar, restar, multiplicar, dividir o combinando operaciones, no es posible saber cómo obtuvieron el resultado. Un ejemplo se aprecia en la Figura 25.

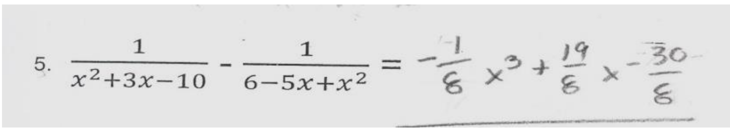

Figura 25. Miscelanea de errores.

Los errores en esta categoría entrarían en la clasificación con el mismo nombre de Keller et al (1940). En la valoración que realiza Muñoz (2002) estos errores se encontrarían en errores graves y muy graves. Este error lo cometieron aproximadamente el 31% de los estudiantes.

Error al cambiar de signo o de número. En esta clase de errores se encuentran aquellos errores en los cuales los estudiantes cambian algún signo o número en la realización del ejercicio. Un ejemplo de este error se aprecia en la Figura 26.

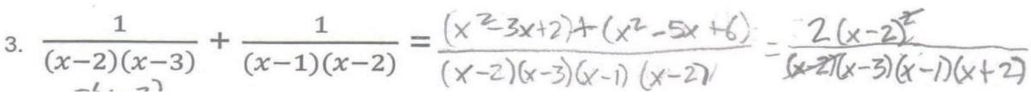

Figura 26. Error al cambiar de signo o de número

Algunos de los errores de esta categoría entrarían en la categoría de Keller et al (1940), "cambiando de signos arbitrariamente". Este error lo cometieron aproximadamente el 7% de los estudiantes.

5.2. Estrategias

Con la intención de llegar a otro de nuestros objetivos, en esta sección se analizan y se describen las estrategias que se supone utilizaron los estudiantes para contestar el cuestionario.

Las estrategias utilizadas fueron:

Factorización de uno o varios signos menos. En esta estrategia lo que hicieron fue factorizar uno o varios signos menos en el denominador para poder tener algún elemento en común en los denominadores, como se puede ver en la figura 27.

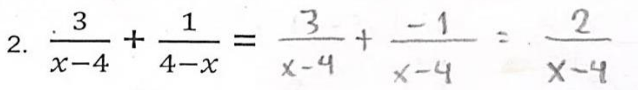

Figura 27. Factorización de uno o varios signos menos

Regla para sumar fracciones. Esta estrategia es la que se utiliza en Aritmética, y se emplea cuando tienen denominadores diferentes; sin embargo, también se puede emplear para resolver este tipo de fracciones.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d \pm b\cdot c}{b\cdot d}$$

Figura 28. Regla para sumar fracciones

Obtención del denominador común por medio del mcm de los denominadores. En esta estrategia lo que hacen los estudiantes es multiplicar, tanto el denominador como el numerador, por una cantidad para poder obtener el mismo denominador. Un ejemplo de cómo se utilizó esta estrategia se puede ver en la figura 29.

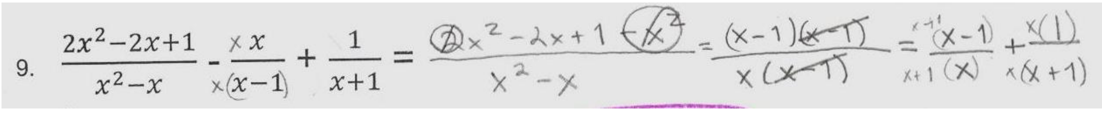

Figura 29. Obtención del denominador común por medio del mcm de los denominadores

Factorización de algún elemento del denominador. En este tipo de estrategia los estudiantes se dan cuenta de que las cuentas se simplifican si factorizan algún término de algunos denominadores. Se puede observar un ejemplo de cómo un estudiante factoriza un elemento en la Figura 30.

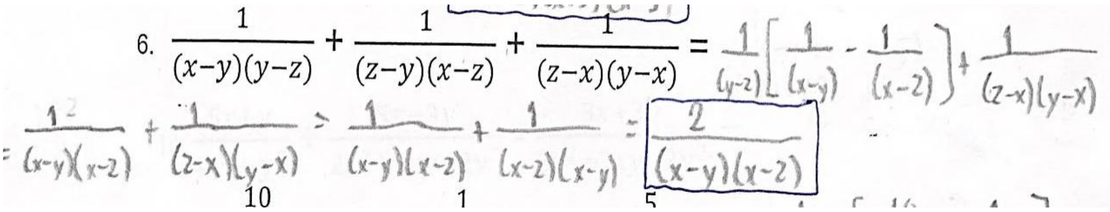

Figura 30. Factorización de algún elemento del denominador

Utilizar un cambio de variable. En esta estrategia, para evitar hacer muchos cálculos, los estudiantes renombran a uno o varios polinomios de otra forma, se ve claramente cómo fue que lo hicieron en la Figura 31.

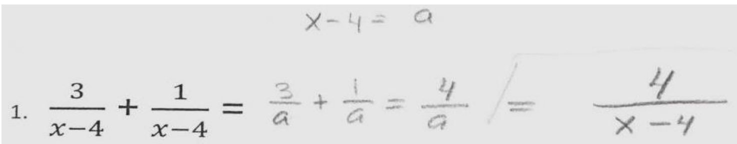

Figura 31. Utilizar un cambio de variable

5.3. Análisis cualitativo

Después de haber aplicado el cuestionario propuesto para esta investigación y, posteriormente, presentando el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a cada uno de los ejercicios, se seleccionaron seis cuestionarios con la finalidad de realizar una entrevista a los estudiantes. Cabe señalar que dicha selección se llevó a cabo de acuerdo con una estratificación: estrato alto, estrato medio y estrato bajo. Esta estratificación está basada en la propuesta por Filloy (1999) y se adaptó para este estudio.

La estratificación se creó a partir del número máximo de ejercicios realizados correctamente al resolver el cuestionario. Cabe mencionar que el número de ejercicios resueltos correctamente va de 0 hasta 11, por lo que cada uno de los estratos quedó como sigue: el estrato bajo se encuentra de 0 a 3 ejercicios correctos; el estrato medio se encuentra de 4 a 7 ejercicios correctos; y el estrato alto se encuentra de 8 a 11 ejercicios correctos. Una vez definidos los intervalos de cada estrato, se procedió a seleccionar en cada uno de los estratos a dos personas al azar, para realizarles las entrevistas.

Se trabajó con una entrevista semi-estructurada (Clement, 2000; Goldin, 2000; Piaget, 2001), ya que el cuestionario (que se utilizó para la entrevista) era el mismo para todos, sin embargo, cada uno de los estudiantes contestó con los conocimientos adquiridos previamente y además dependiendo de lo que contestaron en cada una de las preguntas de la entrevista, se podría cambiar la siguiente pregunta.

Las entrevistas se realizaron individualmente y se videograbaron con el consentimiento de cada uno de los estudiantes. Por otra parte, las entrevistas fueron realizadas en un ambiente agradable y tranquilo, esto permitió que se les escuchara durante el tiempo que tardaran en responder, para así formular la siguiente pregunta, sin tratar de sugerir ningún tipo de respuesta mientras se desarrollaba la entrevista.

Con el fin de investigar más acerca de los procedimientos empleados por los estudiantes se presentan algunos fragmentos de los diálogos de las entrevistas entre un estudiante y el entrevistador; en donde $E_{1\text{-}6}$ denota a cada uno de los entrevistados, es decir:

E1: es el primer estudiante entrevistado. Estrato medio.
E2: es el segundo estudiante entrevistado. Estrato medio.
E3: es el cuarto estudiante entrevistado. Estrato alto.
E4: es el quinto estudiante entrevistado. Estrato bajo
E5: es el sexto estudiante entrevistado. Estrato bajo
E6: es el séptimo estudiante entrevistado. Estrato alto.
Y el entrevistador lo denotaremos como I.

A continuación se presentan algunos fragmentos del diálogo que se sostuvo durante las entrevistas.

I: ¿Me podrías decir qué fue lo que hiciste en el ejercicio 12?
E2: En el ejercicio 12… (revisa el ejercicio y se toma unos segundos para pensar). En primer lugar, cambié de orden las cosas para que apareciera primero el término donde está $\frac{x^2-4x+1}{x^2-1}$ y al mismo tiempo, bueno y después dejé el que aparecía primero y al final dejé el de la resta, no me gusta que estén al principio las restas.
I: ¿Por qué no te gusta que estén al principio?
E2: Es que siento que me confunden, no sé si tenga que ver porque soy derecho o no sé, ese menos no me gusta ahí, entonces lo dejo hasta el final, que primero sean los positivos y al final los negativos.

En este caso, el estudiante reagrupa los términos de izquierda a derecha, empezando a poner los términos con signo positivo para después poner los que tienen signo menos, aunque sólo es un término el que tiene signo negativo, para después poder realizar la suma de los términos con signo positivo y después restarle el término con signo negativo.

En algunos ejercicios los estudiantes suponían que los denominadores eran iguales “después” de desarrollar el producto que se marcaba en los denominadores, en el siguiente fragmento de una entrevista se aprecia lo comentado.

I: ¿Me podrías explicar lo que realizaste en el ejercicio 7?
E5: En el 7… (Después de pensar unos segundos), bueno aquí… me parece que resolví los dos binomios de abajo, la multiplicación (refiriéndose a los binomios de los denominadores).
I: ¿A qué te refieres con resolví?
E5: Ah bueno, no sería, este hice la operación que marcaba aquí y ya me quedaban las siguientes fracciones y luego… me parece que quedaban los dos divisores iguales y esos los sumé, que son los de la segunda y tercera fracción.
I: Es decir, ¿que cuando tú hiciste las operaciones que marcaban los paréntesis te quedaban los denominadores iguales?
E5: Me quedaban dos fracciones con divisores iguales, fue eso, y ya en la siguiente igualdad pues quedó ese […]

En este caso, después de realizar el producto que se marcaba en el denominador de la segunda y de la tercera fracción, y a pesar de que algunos de los binomios de los denominadores son diferentes, le dio como resultado que los denominadores son iguales, esto podría deberse a la forma inadecuada de realizar el producto y también podría haberse evitado si se hubiera percatado de que los binomios no eran iguales.

En otro tipo de error, los estudiantes intentan factorizar un trinomio pero lo hacen de una manera incorrecta. El fragmento siguiente de una entrevista, hace más claro lo anterior.

I: ¿Me podrías decir cómo realizaste el ejercicio 5?
E4: Umm… (Se toma unos segundos para pensar), ok, en el ejercicio 5, primero factoricé el polinomio en ambos lados de la resta y luego… multipliqué igual para sacar el factor común y después dividí en ambos lados […]
I: ¿Realizaste lo mismo que el ejercicio 2?
E4: Si, solo factorizando primero.
I: Y la factorización, ¿cómo la realizaste? o ¿cómo la empezaste a hacer?
E4: Bueno primero veo cual es la, el… el valor que se repite, por decirlo así, que sería en este caso “x” y luego encontrar dos valores que multiplicados me den el ultimo valor y que restados o sumados me den el segundo.

En el anterior fragmento de la entrevista el estudiante explica cómo realizar la factorización de un trinomio, pero cuando realiza dicha factorización no se da cuenta de que la realizó erróneamente, aun cuando después deja el trinomio de la forma en la que estaba inicialmente, es decir, multiplicó el par de binomios que le quedaron al realizar la factorización, su error podría haberse evitado si se hubiera dado cuenta de que no le quedó lo mismo, antes y después de factorizar.

Otro tipo de errores que se podrían haber evitado solo con revisar paso a paso lo que hacían, sería, como se muestra en el siguiente diálogo.

I: ¿Me podrías decir lo que realizaste en el ejercicio 12?

E1: Ajá, pues este (señalando el denominador de la tercera fracción) es lo mismo que la multiplicación de (x+1)(x-1) entonces se queda como común múltiplo y el 2 también, lo multiplicaba por lo que sobrará, por lo de arriba luego hice las restas y sumas correspondientes.
I: En la segunda igualdad, ¿cómo fue que la obtuviste? Después de esta (señalándole la segunda igualdad), ¿qué fue lo que hiciste?
E1: […]
I: Pero en el denominador, ahí mismo ¿qué pasó?
E1: Umm… me comí el x^2
I: ¿A qué te refieres con "me comí"?
E1: Ahh bueno le quité el cuadrado, perdón.
I: ¿Lo quitaste?
E1: Ajá, no lo pase de aquí para acá (señalando)

En este caso, solo hubiera bastado con revisar cada uno de los pasos que realizó para que el mismo estudiante se pudiera dar cuenta de que faltaba un elemento importante para poder llegar a la respuesta, sin embargo, no lo hizo y eso le provocó una respuesta errónea.

En el siguiente fragmento de la entrevista, haremos notar algunas de las estrategias "correctas" que tuvieron los estudiantes al resolver el cuestionario, un estudiante explica con qué método realizó el ejercicio.

I: ¿Cómo fue que realizaste el ejercicio 9?
E3: Umm… (Piensa unos segundos), ah ya igual (refiriéndose a un ejercicio que se le preguntó anteriormente), lo mismo, lo que hice fue que al m. c. m. de los denominadores, lo iba dividiendo entre cada uno de los denominadores y los multiplicaba por el numerador y al final solo hice un poco de aritmética, eso creo.
I: Me has comentado acerca del m. c. m. ¿Sabes encontrar el m. c. m. con expresiones algebraicas?
E3: No entiendo, ¿cómo? ¡de este tipo!
I: Sí, de este tipo.
E3: Sí, no. (Afirmando que sí puede).
I: ¿Podrías sacar el m. c. m. con los denominadores del ejercicio 3?
E3: El 3, ¿no importa que me tarde mucho?
I: No, pero si lo vas diciendo mientras lo haces, mejor.
E3: […]
I: […]
E3: […]
I: […]
E3: Bueno yo diría que a la primera expresión como el factor x-2 es común entre las dos expresiones amm… bueno es obvio que el m. c. m. debe contener a ese factor, entonces solo lo que podemos hacer es multiplicar el x-3 y el x-1 para obtener el m. c. m. […]

Además, a cada uno de los entrevistados se les realizó una pregunta con el fin de saber si eran capaces de reconocer cuáles de los temas vistos en álgebra fueron los que utilizaron para resolver el cuestionario. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no fueron capaces de reconocer todo lo que utilizaron, esto se hará más explícito en el siguiente fragmento de la entrevista con otro estudiante.

I: ¿Qué temas vistos en el bachillerato fueron los que utilizaste para contestar el cuestionario?
E6: Umm… saber manejar fracciones, álgebra.
I: Álgebra, a que te refieres ¿podrías ser más específico?
E6: Bueno me refiero a saber realizar operaciones con, que no sean números, letras (haciendo una seña de comillas con los dedos).

I: ¿A qué te refieres con letras?
E6: Pues a eso, hacer operaciones que no sean con números, no específicamente, saber factorizar, reducir términos, umm… que más, pues creo que ya.
I: ¿Eso fue todo lo que utilizaste?
E6: "mueve la cabeza diciendo sí"

En este caso nos podemos percatar de que el entrevistado solo mencionó factorizar y reducción de términos, además, también señala que se debe saber manejar fracciones y saber realizar operaciones con letras. Con lo anterior podemos notar que el estudiante no es capaz de reconocer todo lo que utilizó.

6. Conclusiones y comentarios

En la investigación realizada, se pudo observar que los estudiantes que ingresan a la universidad traen un pobre conocimiento del álgebra, es decir, tienen graves problemas cuando intentan manipular expresiones algebraicas.

Un gran número de estudiantes que realizaron estos ejercicios los efectuaron sin considerar que se trata de un tipo de fracciones, es decir, no respetaban la forma básica de sumar o restar fracciones, la cual se enseña desde la primaria, por lo que los estudiantes pudieron cometer el mismo error que los niños hacen al inicio del aprendizaje de las fracciones, el cual es: sumar directamente los numeradores y denominadores.

Se encontró también que una gran cantidad de estudiantes, al desarrollar los ejercicios, llegaron a una respuesta parcial. Sin embargo, no era la que se les pedía y esto pudo haberse generado porque los estudiantes desarrollaron todas las multiplicaciones de los polinomios, generando una expresión demasiado grande, la cual ya no sabían cómo reducirla.

Otro de los errores que más se cometió cuando se realizaron ejercicios de fracciones algebraicas es la cancelación de elementos que se encuentran tanto en el numerador como en el denominador, en donde los estudiantes no fueron capaces de reconocer que para cancelar dichos términos, éstos deben de estar en cada uno de los términos del numerador y del denominador. Si los estudiantes pudieran ser capaces de factorizar de forma correcta podrían darse cuenta de este error.

Otro problema que tuvieron los estudiantes es que cuando intentaron utilizar alguna estrategia para resolver el ejercicio (como la regla para la adición de fracciones), es que aplicaron la estrategia de forma parcial o en su caso, la aplicaron de forma incorrecta.

En cuanto a los objetivos de la investigación, en la clasificación que se propuso en este trabajo se detectaron 26 tipos de errores, los cuales fueron extraídos de las respuestas que dieron los estudiantes al contestar el cuestionario, además, para nuestro segundo objetivo se encontraron cinco estrategias que fueron utilizadas en la realización de los ejercicios.

Otra de las cosas que nos pudimos percatar en este estudio, es que todos los estudiantes entrevistados fueron incapaces de reconocer cuáles temas de álgebra utilizaron en la resolución de los ejercicios. Esto mismo podría presentarse en la mayoría de los estudiantes que contestaron el cuestionario, por lo que podríamos suponer que ésta es una de las razones por las cuales los estudiantes no son capaces de realizar los ejercicios.

Sin embargo, pocos estudiantes mostraron tener la suficiente madurez para manipular la variable cuando intentan resolver ejercicios en los cuales tienen que hacer uso de los conceptos y procesos que “aprendieron” en cursos anteriores. Lo anterior se ve reflejado en los estudiantes que tuvieron el estrato más alto, ya que estos estudiantes fueron más capaces de darse cuenta de cuál fue su error y hasta fueron capaces de corregirlo en el momento que se les preguntó, además detallaron claramente todo el procedimiento que desarrollaron.

En general, en esta investigación nos pudimos percatar de que los estudiantes muestran una gran dificultad cuando intentan realizar ejercicios que tienen que ver con la adición de fracciones, además de que algunos de los errores presentados en este trabajo pueden ser la causa del bajo aprovechamiento en la escuela.

Por último, se espera que este trabajo de investigación sirva para comprender de mejor manera lo que los estudiantes realizan cuando tienen que manipular o trabajar con expresiones algebraicas, y que además sirva para las instituciones de nivel medio y medio superior para intentar dar una solución y de esta manera tratar de evitar estas deficiencias que se generan en el aprendizaje del Álgebra básica.

Además, se pretende que los resultados de este estudio sirvan para proponer una vía de solución a los errores que comúnmente cometen los estudiantes y que de esta manera traten de evitar las deficiencias que se generan en el aprendizaje del Álgebra básica y que siguen teniendo en sus estudios posteriores.

Bibliografía

Anfossi, A. (1959). *Curso de álgebra*. Distrito Federal, México: Editorial Progreso.

Booth, L. (1988). Children’s Difficulties in Beginning Algebra. *The ideas of algebra, K-12*. 20-32. NCTM.

Boyer, J. B. (sin fecha). *Primeras nociones de álgebra con numerosos ejercicios.* Distrito Federal, México: Editorial Enseñanza.

Caballero, E. (2015). *Análisis y clasificación de errores en la reducción de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la F.C.F.M*. Tesis de Licenciatura no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547-589). London, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, J. S. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Granada, Granada, España.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). London, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Keller, M. W., Shreve, D. R., y Remmers, H. H. (1940). Diagnostic testing program in Purdue University: 1. Formal algebraic manipulations. *The American Mathematical Monthly,* 47(8), 544-548.

Kieran, C. y Chalouh, L. (1993). Prealgebra: the transition from arithmetic to algebra. *Algebraic Thinking, Grades K-12,* 59-70.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalized arithmetic (algebra) by secondary school children*, PhD Thesis, University of London.
Linchevski, L., y Herscovics, N. (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra. En *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 176-183).
Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence, *Journal of Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.
Muñoz, A. (2002). La valoración de los errores en el aprendizaje de la matemática. *Acta Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 15(2). 1249-1254.
Phillip, R. A. y Schapphelle, B. (1999). Algebra as generalized arithmetic: starting with the known for a chance. *The Mathematics Teacher*, 92(4), 310-316.
Piaget, J. (2001). *La representación del mundo en el niño,* Madrid, España: Ediciones Morata.
Rees, P. y Sparks, F. (1998). *Álgebra*. Distrito Federal, México: Reverté Ediciones.
Rico, L. (1994). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática,* 69-108.
Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelación en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.
Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática,* 6(3), 90- 105.
Vega, D., Molina M., y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 233-258.
Wentworth, J. y Smith, D. E. (1917). *Elementos de álgebra*. Nueva York: Estados Unidos: Ginn y Compañía.
Wong, M. P. (1997). Numbers versus letters in algebraic manipulation: which is more difficult? En *Proceedings of the 21st Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 285-290).

Emmanuel Caballero Juárez. Nació en la Ciudad de Puebla, México, el 21 de junio de 1985. Es Licenciado en Matemáticas por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.
jhony100to@hotmail.com

José Antonio Juárez López. Nació en la Ciudad de Puebla, México, el 15 de agosto de 1969. Se desempeña actualmente como Profesor Investigador de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Es Coordinador de la Maestría en Educación Matemática en la misma institución. Es Licenciado en Educación Media en el Área de Matemáticas por la Escuela Normal Superior del Estado de Puebla. Es Maestro y Doctor en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México. Ha publicado un libro y diversos artículos en revistas y memorias de congresos del área.
jajul@fcfm.buap.mx

ANEXO

NOMBRE:

EDAD:

CARRERA: MATRICULA

NOMBRE DE LA ESCUELA DE PROCEDENCIA:

Reduce a la **MINIMA** expresión los siguientes ejercicios:

1. $\frac{3}{x-4} + \frac{1}{x-4} =$

2. $\frac{3}{x-4} + \frac{1}{4-x} =$

3. $\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} =$

4. $\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(2-x)} =$

5. $\frac{1}{x^2+3x-10} - \frac{1}{6-5x+x^2} =$

6. $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(z-y)(x-z)} + \frac{1}{(z-x)(y-x)} =$

7. $\frac{10}{(2r-3s)(2r+s)} + \frac{1}{(2r+s)(r+s)} - \frac{5}{(2r-3s)(r+s)} =$

8. $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x+2)} - \frac{4x}{x(x^2-4)} =$

9. $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} =$

10. $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} =$

11. $\frac{x}{x^2-5x-14} + \frac{2}{x-7} - \frac{x}{x^2-9x+14} =$

12. $\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{x^2-4x+1}{x^2-1} =$

13. $\frac{2(x-3)}{x^2-2x} + \frac{3x-6}{x^2-3x} - \frac{4(x-1)}{x^2-5x+6} =$

14. $\frac{5x+y}{4x^2-y^2} + \frac{5x-3y}{2x^2+5xy+2y^2} - \frac{3x+3y}{2x^2-3xy-2y^2} =$